

13/03/2017

Έστω $A \in F^{n \times n}$ και ορίσμε το $\chi_A(\lambda) \in F[\lambda]$, ιδιοτιμες του A αν λ ιδιοτιμή $\lambda_A(\lambda)$ ο ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .

$$V_A(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in F^{n \times 1} : A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right\} \text{ και είναι υπόχωρος του } F^{n \times 1}$$

Ορισμός: Έστω $A \in F^{n \times n}$. Το $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in F^{n \times 1}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A αν

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}_{n \times 1} \text{ και υπάρχει } \lambda \in F \text{ ιδιοτιμή του } A, \text{ με } \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in V_A(\lambda).$$

$$(\text{δηλ. } A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix})$$

Εργασίες, το σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του

$$A = \bigcup (V_A(\lambda) \setminus \{\mathbf{0}_{n \times 1}\})$$

λ ιδιοτιμή του A

(Π.Χ)

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Βρείτε όλα τα ιδιοδιανύσματα του A .

$$\rightarrow \chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^2$$

Άρα ο A έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ (με αλτ. πολλα 2).
 $V_A(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} : \xi_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Το σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του $A = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} : \xi_1 \in \mathbb{R} \text{ και } \xi_1 \neq 0 \right\}$

(π.χ)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Υποθέτουμε $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ 3 γ. ανεξ. ιδιο-
διανύσματα με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}$

$$\leadsto \text{Έστω } v_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Έχουμε, γ. α. } i=1, 2, 3 \quad A v_i = \lambda_i v_i \quad (*)$$

$$\text{Θέτουμε } P = [v_1 | v_2 | v_3] = [p_{ij}] \quad (**)$$

$$\text{Τότε } AP = A[v_1 | v_2 | v_3] = [Av_1 | Av_2 | Av_3] = [\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2 | \lambda_3 v_3]$$

$$= [v_1 | v_2 | v_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Συνεπώς } AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

↑

(ΛΑΒΑ Α ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ. ΠΡΟΓΕΝΙΚΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ)

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i.) A Διαγωνισμός

ii.) Υπάρχει βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A.

(Στο (π.χ) και γενικά αν $P^{-1}AP = \text{Διαγώνιος}$ οι στήλες του P είναι βάση του $\mathbb{F}^{n \times 1}$ από ιδιοδιανύσματα)

Ερώτημα: Υποθέτουμε A Διαγωνισμός. Πως βρίσκουμε $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ αντίστροφο και D Διαγώνιο με $P^{-1}AP = D$;

ΑΛΓΟΡΙΘ.

Βήμα 1: Υπολογίζουμε το χαρμ. πολ/μο $\chi_A(x) \in \mathbb{F}[x]$

Βήμα:2: Αφού ο A διαγωνίσιμος, το $\chi_A(x)$ αναλύεται σε γινόμενο πρώτων βαθμικών. Έστω $\chi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_5)^{a_5}$ όπου $\lambda_i \in F$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ κ' $i \neq j$, $a_i > 0$ κ' $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = n$

Βήμα:3: Για $i=1,2,\dots,5$ υπολογίζουμε βάση του διανύσματος $V_A(\lambda_i)$. Αφού ο A διαγωνίσιμος αλφ. πολ.τα $\lambda_i = \text{γεωμ. πολ.τα } \lambda_i$ άρα $\dim_F V_A(\lambda_i) = a_i$.

Βήμα:4: Θέτουμε $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_5, \lambda_5, \dots, \lambda_5)$

Έστω βάση του $V_A(\lambda_1)$ $v_1, v_2, \dots, v_{a_1}$

" " $V_A(\lambda_2)$ $v_{a_1+1}, v_{a_1+2}, \dots, v_{a_1+a_2}$

" " $V_A(\lambda_5)$ $v_{a_1+\dots+a_{s-1}+1}, \dots, v_{a_1+\dots+a_2+\dots+a_5}$

Θέτουμε $P = [v_1 | v_2 | \dots | v_n] \in F^{n \times n}$. Τότε P αντιστ. και $P^{-1}AP = D$.

(7.Χ) Αν $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ τέ $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-3)(x-4)$ → βάση → βάση
 το $V_A(2)$ έχει βάση $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{V_A(3)}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{V_A(4)}$

τότε $P^{-1}AP = D$ τέ $D = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$

και $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4}$

Εφαρμογή:

Ακολουθία Fibonacci

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13 \dots$$

$$\text{Ορίζεται για } n \geq 3 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_3 = a_1 + a_2 \quad \text{Άρα} \quad \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (*) \quad \text{όπου } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_4 = a_2 + a_3 \\ a_3 = a_3 \end{cases} \quad \text{Άρα} \quad \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Με επαγωγή} \quad \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-2} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

Άρα αρκεί να υπολογίσουμε το A^k , $\forall k \geq 1$.

Βρίσκουμε: $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1$

$$\text{Ο } A \text{ έχει ιδιοτιμές } \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ με αντίστοιχο } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{όρα } \chi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ με αντίστοιχο } \lambda_1$$

Άρα $\chi_A(x)$ αναλύεται σε γινόμενο διακεκομμένων πρώτοβαθμίων
έχουμε A διαγωνίσιμος

Βρίσκουμε βάση V_1 του $V_A(\lambda_1)$
 V_2 του $V_A(\lambda_2)$

$$\text{Θέτουμε } P = [V_1, V_2], \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{Άρα } P^{-1}AP = D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PDP^{-1} = A \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1} \text{ για κάθε } k \geq 1 \Rightarrow$$

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{Μετά τις πράξεις υπολογίζουμε του } P \text{ έχουμε}$$
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad \forall \underline{n \geq 1}$$

Πρόταση: Έστω $A \in F^{n \times n}$. Αν υποθέσουμε για $i=1, 2, \dots, s$ ότι $v_i \in F^{n \times 1}$ ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και ότι $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$. Τότε τα $v_1, \dots, v_s$ είναι γρ. ανεξ. (ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γρ. αυ.).

Απόδ. Ισχυρισμός: Έστω j με $1 \leq j \leq s$.
Τότε τα $v_1, v_2, \dots, v_j$ είναι γρ. αυ.

→ Με επαγωγή στο j
Για $j=1$ το γρ. αυ. γιατί $v_1 \neq 0$
Υποθ. $1 \leq j \leq s$ και $v_1, \dots, v_{j-1}$ γρ. ανεξ.
Θ.Σ.ο $v_1, \dots, v_j$ γρ. αυ.

→ Έστω ότι δεν είναι. Τότε υπάρχουν $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in F$
όχι αλλα μηδέν με $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j v_j = 0$ (*)

Από επαγωγική υπόθεση $\Rightarrow \alpha_j \neq 0_F$

Α βάζοντας (*) δίνει $\alpha_1 A v_1 + \dots + \alpha_{j-1} A v_{j-1} + \alpha_j A v_j = A \alpha v_j = \alpha v_j$
 $\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} \lambda_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j \lambda_j v_j = \alpha v_j$ (**)

Πολλαπλα. την (*) με $-\lambda_j$ και προσθέ. στην (**)

Έχουμε $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_j) v_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_j) v_2 + \dots + \alpha_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) v_{j-1} = 0$.

Αλλά $\lambda_j \neq \lambda_i$ για $i \neq j$ και αφού $v_1, \dots, v_{j-1}$ γρ. ανεξ.

απ' την επαγωγική υπόθεση.

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{j-1} = 0_F$. Άρα η (*) δίνει $\alpha_j v_j = 0 v_j \Rightarrow$

$\Rightarrow v_j = 0 v_j$

απόδειξη, κάθε ιδιοδιανύσμα είναι
μη-μηδενικό.